



ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DE CASO COM SEIS CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Damires Ferreira Lima da Silva

Lenira Carla Silva de Lemos, Marcela Valdecir Silva de Lacerda

damiresferreira27@gmail.com

Resumo

A elaboração do presente artigo acontece em resposta a uma atividade proposta em sala de aula no curso de graduação de Pedagogia da Universidade Federal de Pernambuco, especificamente na disciplina Fundamentos de Ensino da Matemática II, ofertada no 5º período do curso. A atividade consistia em utilizar conceitos apresentados e aprendidos na disciplina, especificamente a análise combinatória, a permutação, o arranjo, produto cartesiano e combinação, todas temáticas obrigatórias para o ensino de matemática nos anos iniciais. A proposta apresentada em sala de aula foi a de que nos dividíssemos em duplas ou trios, onde os estudantes da turma deveriam elaborar questões que abordassem estes temas, com base no conhecimento aprendido com os textos indicados na disciplina. A partir da apropriação do conteúdo, elaboramos questões, que deveriam ser aplicadas com estudantes que se encaixassem na faixa etária tida como regular para os alunos destas séries, do 1º ao 5º do ensino fundamental, a aplicação do exercício estava restrita a duas crianças por componentes da equipe. Em nosso caso solicitamos que seis crianças respondessem as questões. Sendo analisada de forma qualitativa suas respostas, observando a forma como as crianças elaboraram as respostas, suas estratégias e que artifícios as mesma utilizaram para chegar em uma resposta lógica, a que elas consideraram correta. Observamos as estratégias apresentadas pelas crianças ao resolverem os problemas, onde estas basearam-se instintivamente na listagem de possibilidade, tendo em alguns casos a utilização de desenhos. Para a elaboração do artigo e análise dos resultados levamos em consideração que o raciocínio combinatório não é desenvolvido apenas no ambiente escolar, pois fora da escola a criança está em constante contato com esses tipos de problematização. Lembramos sempre que é função



da escola possibilitar meios para que esse raciocínio venha a ser desenvolvido, e é no ambiente escolar que a criança deve levantar diversas possibilidades sobre as situações que lhe forem propostas, apresentando assim diversas estratégias de resoluções.

Abstract

The preparation of this article is in response to a proposed activity in the classroom at the undergraduate course in Pedagogy of the Federal University of Pernambuco, specifically in the discipline Fundamentals of Teaching Mathematics II, offered in the 5th period of the course. The activity consisted of using concepts presented and learned in the discipline, specifically combinatorics, a permutation, arrangement, and combination Cartesian product, all mandatory subjects for teaching mathematics in the early years. The proposal presented in the classroom was that divide into pairs or trios, class where students should develop questions that addressed these issues, based on the knowledge learned from the papers listed in the discipline. From the appropriation of content, elaborate issues that should be applied to students who fit the age group considered as regular students for these series, 1st to 5th grade of elementary school, the application of the exercise was restricted to two children by team members. In our case we request that six children answer the questions. Being analyzed for their qualitative responses, observing how children developed responses, their strategies and that the same tricks used to get a logical response, they considered correct. Observe the strategies presented by children to solve problems, where they were based instinctively on the list of possibilities, in some cases the use of drawings. For the preparation of the article and analysis of the results we consider the combinatorial reasoning is not developed only at school, out of school because the child is in constant contact with these types of questioning. Always remember that it is a school function possible means to that reasoning will be developed, and is in the school that the child should raise several possibilities about situations offered to them, thus presenting several strategies resolutions.



Palavras-chave: Análise Combinatória; Resolução de Problemas; Estudo de Caso; Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Introdução

Há muitos anos percebe-se a necessidade de produzir estudos baseados no raciocínio combinatório. Muitos foram os estudos produzidos a cerca das dificuldades enfrentadas na resolução das atividades que apresentam problemas que envolvem conteúdos relacionados à análise combinatória, *permutação, arranjo, produto cartesiano e combinação*. Dentre esses levantamentos podemos citar os trabalhos de: Nesher ******(1988); Bryant, Morgado e Nunes ****** (1992); Pessoa, Silva e Matos Filho ******(2005); Pessoa e Matos Filho ******(2006a); Inhelder e Piaget ******(1976); Schliemann ******(1988); Pedrosa Filho ******(2008); Moro e Soares ******(2006); Correia e Fernandes ******(2007).

A partir destes estudos ficou comprovado que as dificuldades na resolução destas problemáticas ocorriam, pois de forma geral as pessoas não tiveram acesso a esses tipos de problematização durante o período escolar, e quando tinham era no ensino médio. Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) vemos que o mesmo recomenda que os diferentes tipos de problemas combinatórios podem e devem ser propostos aos alunos desde o início do processo de escolarização, sem ênfase na formalização, mas a partir de um trabalho com problemas que envolvam escolha e contagem. Se este trabalho começar a ser desenvolvido nos primeiros anos de escolarização, muitos problemas encontrados no futuro poderão ser evitados. Segundo Vergnaud (1986 apud PESSOA, BORBA 2009) muitos conceitos levam muito tempo para serem desenvolvidos e por isso tem que ser iniciado, bem cedo, a partir dos 4 ou 5 anos e que vai até os 15 ou 16 anos.

Segundo Pessoa e Borba (2009) é possível que a criança consiga desenvolver compreensão sobre estes tipos de problemas antes mesmo de sua introdução formal na



escola, e que elas são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

Segundo Smole e Diniz (2001) “é comum muitos professores acreditarem que as dificuldades apresentadas por seus alunos em ler e interpretar um problema ou exercício de matemática estão associadas à pouca habilidade que eles têm para a leitura.” Eles alegam também que, se os alunos obtiverem maior fluência na leitura da língua materna, conseqüentemente ele conseguiria realizar uma melhor leitura e interpretação dos problemas matemáticos.

Não é de nosso interesse negar a afirmação citada à cima, porém devemos questioná-la, pois o problema na resolução de problemas matemáticos não se centra apenas na leitura e interpretação dos textos, claro que existem os casos que a má interpretação gera dificuldades na resolução, mas não devemos colocar toda a culpa neste ponto. O papel da escola neste momento é o de encontrar meios que a permitam cumprir a sua missão inicial que é a de alfabetizar os alunos que estão sob sua responsabilidade dentro de um contexto de letramento, principalmente os das séries iniciais, pois para viver em sociedade e construir conhecimentos precisamos possuir estas duas habilidades, que nos auxiliaram a conseguir realizar a leitura de qualquer enunciado de atividades e textos completos.

Apesar de existirem muitos estudos baseados nas dificuldades, conseguimos observar alguns que trabalham com o raciocínio combinatório propondo intervenção de ensino e que envolvem uma amplitude de situações. É o caso de Azevedo, Costa e Borba (2011 apud PESSOA e SANTOS 2012) que desenvolveu seus estudos através do software *Árbol*, e de Barreto e Borba (2011 apud PESSOA e SANTOS 2012) que investigou o uso de estratégias específicas (listagem e árvore de possibilidades) com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Após esta breve introdução sobre as questões que envolvem conceitos que do tipo análise combinatória, *permutação*, *arranjo*, *produto cartesiano*, *combinação*.



Relataremos a seguir nossa experiência na realização desta atividade a qual passamos agora a analisar a resolução dos problemas que elaboramos, no qual as seis crianças que investigamos, que se encontram na faixa etária entre os seis e dez anos, encontraram resultados de forma livre sem indução ou pressão para a elaboração de suas respostas. Procuramos analisar os resultados a partir do que as crianças pensam sobre as estruturas multiplicativas e o raciocínio combinatório, quais são as suas dificuldades, facilidades, estratégias de resolução e conhecimentos já estabelecidos.

Referencial Teórico

Segundo Gonçalves (2003) compreender o raciocínio multiplicativo, implica em uma transformação muito importante no pensamento das crianças, muitas vezes as operações de multiplicação e divisão são consideradas relativamente simples do ponto de vista matemático, entretanto são operações que exigem uma complexidade quando tratamos do nível cognitivo, pois quando as encaramos em termos de modelação de situações e não apenas do ponto de vista do cálculo, percebemos que estes problemas envolvem novos tipos de relações entre eles, que devem ser exploradas com mais cuidado, possibilitando novas interpretações, ramificações e exigindo estratégias diferenciadas para sua resolução.

Para Nunes e Bryant (1997 apud PESSOA e BORBA 2009) ambos afirma que há muitos níveis diferentes de raciocínio multiplicativo e descrevem os seguintes tipos de problemas, os que envolvem diferentes lógicas para a estrutura multiplicativa: 1) correspondência um-a-muitos; multiplicação; problema inverso de multiplicação. Produto cartesiano; 2) Relação entre variáveis – co-variação; 3) Distribuição.

Semelhantemente ao que é trazido pelo PCN (BRASIL, 2007) onde este parâmetro diferencia quatro subgrupos de situações envolvendo problemas multiplicativos, sendo eles: Comparativa; Proporcionalidade; Configuração retangular;



Combinatória. Já Vergnaud (1983, 1991 apud PESSOA e BORBA 2009) se restringe a descrever duas classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quartanárias, o primeiro são os problemas de isomorfismo de medidas e o segundo são os problemas de produtos de medidas. No raciocínio combinatório este segundo problema pode ser classificado como produto cartesiano.

Até o 5º ano do Ensino Fundamental, é importante trabalhar com três conceitos do campo multiplicativo: a proporcionalidade, a organização retangular e a combinatória. O nosso foco neste trabalho será o trabalho com o raciocínio combinatório.

Segundo Borba (2010)

“a combinatória é conhecida como a *arte de contar*, pois nas situações combinatória são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma a combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições.” (BORBA, 2010 p. 1)

Em outra produção, Borba (2009) diz que é necessário que a escola ofereça situações diversas para a resolução de problemas, para que os alunos sejam capazes de produzir suas próprias reflexões, para que consigam estabelecer relações, para a partir deste momento sejam capazes de construir novas aprendizagens, fazendo com que sua rede de conhecimento seja ampliada. Com este movimento os saberes tornam-se mais consistentes.

Para Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandes (1991 apud BORBA 2010):



“na análise combinatória são estudadas quatro estruturas e relações discretas, sendo os problemas mais frequentes a demonstração de existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem determinadas condições e a contagem ou classificação de subconjuntos de um conjunto finito que atendem a certas condições dadas.”(BORBA, 2010 p.2)

A análise combinatória divide-se em quatro tipos, são eles:

- Produto Cartesiano- Dois ou mais conjuntos, distintos serão combinados para construir um novo grupo. A ordem dos elementos não irá gerar novas possibilidades. É o único problema em que a multiplicação resolve diretamente.
- Arranjo- De um conjunto maior será selecionado objetos ou situações em que serão construídos os subgrupos menores. A ordem dos elementos escolhidos importará, pois poderá gerar novas possibilidades.
- Combinação- De um conjunto maior será selecionado objetos ou situações em que serão construídos os novos subgrupos menores. A ordem dos elementos escolhidos não irá gerar novas possibilidades.
- Permutação- Serão usados todos os elementos de um conjunto, onde a ordem desses elementos importará, pois será gerado novas possibilidades.

Segundo Morgado (1991 apud PESSOA e BORBA 2009):

“Embora a análise combinatória disponha de técnicas gerais que permitam abordar certos tipos de problemas, a solução de um problema combinatório exige a compreensão plena da situação descrita, sendo esse um dos encantos desta parte da Matemática; e problemas fáceis de enunciar revelam-se, por vezes, difíceis exigindo uma alta dose de criatividade e



compreensão para a sua solução.” (MORGADO 1991 apud PESSOA e BORBA 2009)

Uma das dificuldades que os alunos encontram em ler e compreender textos de problemas cominatórios, entre outros fatores, estão ligados à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. Os alunos não possuem acesso a esse tipo de problematização, e quando se deparam não conseguem desenvolver o problema.

Segundo Diniz (2001) o que acontece quando o professor adota problemas convencionais como único material para o trabalho, acontece o seguinte:

“...com Resolução de Problemas na escola, podem levar o aluno a uma postura de fragilidade e insegurança diante de situações que exijam algum desafio maior. Ao se deparar com um problema no qual não identifica o modelo a ser seguido, só lhe resta desistir ou esperar a resposta de um colega ou do professor. Muitas vezes, ele resolverá o problema mecanicamente, sem ter entendido o que fez e sem confiar na resposta obtida, sendo incapaz de verificar se a resposta é ou não adequada aos dados apresentados ou à pergunta feita no enunciado.” (DINIZ, 2001 p. 89-90)

O professor tem que propor atividades que dêem condições para a realização de um trabalho que consiga levar os alunos a confrontarem opiniões e refletirem sobre a finalidade, a adequação e a utilização dos dados apresentados no texto, interpretando e analisando o problema com mais atenção.

Concretizando o que Diniz expõe Cavalcanti vai dizer que:

“em nossas experiências com resolução de problemas nas séries iniciais, temos visto que tão importante quanto o tipo de problema a ser trabalhado e a compreensão do texto é a atenção que devemos dar aos diferentes modos pelos quais as crianças podem resolver problemas. Acreditamos que este é um caminho que contribui muito para que tal ato seja um processo de



investigação, no qual o aluno se posicione com autonomia e confiança e possa combinar seus conhecimentos para resolver a situação apresentada.”(CAVALCANTI, 2001 p. 121)

Metodologia

Como mostrado anteriormente à realização deste trabalho tem como objetivo central realizar uma análise a partir de um instrumento diagnóstico, contendo questões referentes a análise combinatória, *permutação*, *arranjo*, *produto cartesiano*, *combinação*, como já havíamos ressaltado anteriormente em nosso texto.

Buscamos observar de forma quantitativa, os acertos e erros das crianças fazendo uma análise qualitativa, observando aspectos gerais, mais principalmente o desempenho delas e as estratégias utilizadas para resolução dos problemas.

Participaram da pesquisa seis crianças entre 6 e 10 anos onde duas eram de escola pública e quatro de escola privada. As crianças foram escolhidas aleatoriamente, obedecendo apenas à diferenciação de idade e de série escolar.

Cada uma recebeu um questionário e tiveram aproximadamente 1 hora para responder. A ficha com as perguntas, que pode ser encontrada posteriormente no Apêndice deste trabalho, contava com 4 questões, uma correspondente a cada tipo do raciocínio combinatório. Sendo a primeira Combinação, a segunda Permutação, a terceira questão Arranjo e a quarta focando em Produto cartesiano.

Nenhuma das questões apresentava um grande número de possibilidades nas respostas. Foi informado que os problemas poderiam ser respondidos da melhor forma possível, de maneira livre, a forma que elas achassem adequada sem uma predefinição de resposta correta ou errada.

As questões foram lidas em voz alta e as mesmas fizeram, cada uma, a sua própria interpretação, fazendo usos de estratégias para resolução das mesmas.

Resultados



Analisaremos partindo do tipo de respostas apresentadas pelos alunos investigados. Dando continuidade, faremos menção das estratégias apresentadas pelos alunos ao responderem os problemas de Combinatória.

1ª Questão: Paula, Laura, Felipe, João e Lucas estão concorrendo a uma viagem que será sorteada entre os 5. Lembrando que apenas 3 poderão ir para esta viagem, quais as possibilidades possíveis no sorteio?

- Quatro das crianças apresentaram respostas incompletas, com estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática, porém não esgotaram as possibilidades. Uma das crianças apresentou resposta correta, porém repetiu um dos grupos dentro das possibilidades. A outra criança também apresentou resposta correta, explicitando a estratégia, visando a busca pela regularidade. Todas utilizaram de listagem de possibilidades.

2ª Questão: Um semáforo possui 3 cores que são representadas da seguinte forma: Vermelho, Amarelo e Verde. Se variarmos a posição das cores, quantas formações novas poderíamos obter e assim formar novos sinais?

- Quatro das crianças apresentaram respostas incompletas com estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática. As outras duas apresentaram respostas corretas, porém uma repetiu dois grupos dentro das possibilidades e a outra explicitou a estratégia utilizada. Todas utilizaram listagem de possibilidades fazendo uso do desenho como recurso.

3ª Questão: Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

- Três das crianças apresentaram respostas incompletas com estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática. Ambas não esgotaram as possibilidades. Duas apresentaram repetição na resposta e a outra fez a junção inadequada de números iguais esquecendo do número 41. Uma apresentou a resposta incorreta, pois utilizou o princípio de contagem. E outra apresentou resposta correta. Todas utilizaram de listagem de possibilidades



4ª Questão: Fernanda possui 3 saias (uma azul, uma amarela e uma vermelha) e 2 blusas (uma preta e uma rosa). De quantas formas diferentes ela pode vestir uma blusa e uma saia?

- Três das crianças apresentaram resposta correta, explicitando estratégias e buscando a regularidade. Três apresentaram respostas incompletas com estabelecimento de relação correta utilizando uma estratégia não sistemática, e não explorou as possibilidades. Todas utilizaram de listagem de possibilidades.

Das 6 crianças que participaram da pesquisa pode-se observar que apenas a do 5º ano conseguiu responder todo o questionário usando algumas estratégias, diferente das demais. Todas usaram listagem de possibilidades, e a maioria deixaram as suas respostas incompletas, pois não possuíam a intuição para continuarem a explorar as possibilidades.

Considerações Finais

Conseguimos observar que das crianças analisadas, conseguiram em sua maioria, compreender as questões propostas. Porém não souberam desenvolver o pensamento até o ponto de esgotar todas as possibilidades, cremos que um dos motivos pode ser a não familiarização com determinadas problematizações.

As crianças conseguiram desenvolver diversas estratégias para solucionar um determinado problema. Além das listagem de possibilidades muitas conseguiram raciocinar outras estratégias que auxiliaram na resposta final da questão.

Analisamos também que a problematização referente a questão que envolvia a temática de Arranjo foi a que teve o maior índice de acertos, isso por que se tratava de uma questão simples, e que possuía algumas possibilidades de resolução, ao final exigia pouco esforço.



Através de nossas análises é inevitável que realizemos a reflexão de que é de extrema importância que as escolas aproveitem esses tipos de estratégias, ou melhor, apresente essas alternativas aos alunos, pois ajudaria os na compreensão de diversos problemas semelhantes e que possuam a mesma configuração, não se detendo apenas a análise combinatória, que foi o foco do nosso estudo, mas também as demais questões encontradas dentro do campo da matemática.

Como educadoras/es devemos focar nossa análise na tentativa da criação de estratégias possibilitem trazer contribuições positivas para o estudo da análise combinatória. O Estudo dos déficits é importante, entretanto é mais necessário buscar soluções que nos auxiliam a superar o as idéias previsíveis, mostrando assim aos nossos alunos que existem formas de alcançar os resultados, além das respostas pré-existentes, principalmente quando pensamos em análise combinatória e suas ramificações.

Agradecimentos

Agradecemos primeiramente a Deus por tudo quanto Ele tem nos concedido. Aos nossos professores, amigos e familiares. A cada criança que se doou para realização deste trabalho. Obrigado a todos.

Referências

- BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA. 2009
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. MEC/SEF. Brasília, 142p. 1997
- GONÇALVES, Alice. Multiplicação e divisão: conceito em construção...Educação e Matemática. Nº 75 Novembro/Dezembro de 2003



PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís. Estudo de Caso: Como Duas Crianças passaram a Compreender a Combinatória a Partir de Intervenções?. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos. SP. UFSCar; v. 6 n. 1 p. 358- 382. 2012

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1^a a 4^a série. Zetetiké/Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. Faculdade de Educação. Campinas, SP, v.17 n. 31, 2009

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Ed. Artmed - Porto Alegre, p. 69-150 2001